Alumno ......

Tiempo total para la prueba: 150 minutos

Utilizad los dibujos de los ejercicios 4, 6 y 7 en vuestras respuestas.

Antes de empezar a responder lee atentamente todos los enunciados. Cuando termines tu respuesta a un ejercicio vuelve a leer el enunciado y comprueba que has respondido a lo que se pregunta.

1. (1,5 puntos)

(a) Define grafo 3-conexo y grafo 3-aristo-conexo. Dibuja un grafo simple con al menos 8 vértices que sea 3-aristoconexo pero no sea 3-conexo. Justifica que el grafo dibujado cumple las condiciones pedidas.

(b) Demuestra que un grafo simple *G* es 2-conexo si y sólo si para cada par de aristas e y e' existe un ciclo en *G* que las contiene.

Solución

(b) $\Rightarrow$) Sean e, e' dos aristas de *G*, u, u' vértices insertados en las aristas e, e' respectivamente y $G^* = G \cup \{u, u'\}$, entonces *G* es 2-conexo $\Leftrightarrow$ G^* es 2-conexo $\Rightarrow$ en G^* existen dos caminos C_1 y C_2 internamente disjuntos que unen u y u' $\Rightarrow$ $C_1 \cup C_2$ es un ciclo en *G* que contiene a las aristas e, e'

$\Leftarrow$) Si *G* no es 2-conexo $\Rightarrow$ existe u vértice corte y $G - \{u\}$ tiene dos componentes conexas G_1 y G_2. Entonces una arista e en G_1 y otra arista e' en G_2, no están en un mismo ciclo.

2. (1,5 puntos)

(a) Enuncia y demuestra la fórmula de Euler para grafos planos. Demuestra que un grafo planar maximal de grado máximo 5 tiene a lo sumo 12 vértices.

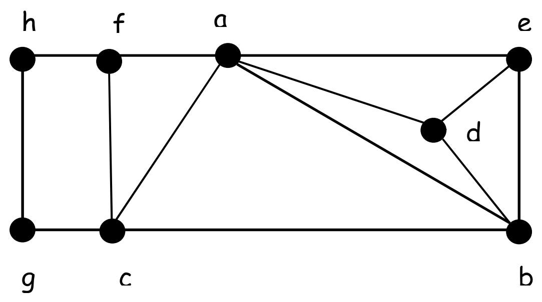
(b) Averigua si la sucesión [5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2] es gráfica. En caso afirmativo construye dos grafos, uno planar y el otro no planar, con esa sucesión de grados.

Solución

(a) Sea *G* un grafo planar maximal de grado máximo 5, entonces
$q = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d(v) \leq \frac{5}{2}n$ y $q \leq 3(n-2)$ por tanto, $q \leq 3(n-2) \leq \frac{5}{2}n \Rightarrow n \leq 12$

(b)

5a	4b	4c	3d	3e	3f	2g	2h
	3b	3c	2d	2e	2f	2g	2h
		2c	1d	1e	2f	2g	2h
		2c	2f	2g	2h	1d	1e
			1f	1g	2h	1d	1e
			2h	1f	1g	1d	1e
				0f	0g	1d	1e
				1d	1e	0f	0g
					0e	0f	0g



3. **(1,5 puntos)**

Sea G = (V, A) un grafo simple donde V = {0, 1, 2, 3, ... , 2015} y donde dos vértices a, b son adyacentes si

a + b ≡ 0 (mod 3). Se pide:

(a) ¿Cuál es el grado de cada vértice? ¿Es G regular?

(b) Demuestra que G tiene dos componentes conexas. ¿Qué grafos son estas componentes? ¿Son isomorfas?

(c) Determina el número cromático de cada componente conexa.

(d) Averigua si las componentes conexas son grafos eulerianos. ¿Son grafos hamiltonianos?

Solución

(a) $V' = \{3k, k = 0..671\}, card\ V' = 672, d(v) = 671, \forall v \in V' \Rightarrow K_{672}$

$V'' = \{1,2,4,5,7,8,\ldots,2014,2015\}, card\ V'' = 1344, d(v) = 672, \forall v \in V'' \Rightarrow K_{672,672}$

$G\ no\ es\ un\ grafo\ regular.$

(b) $G\ tiene\ dos\ componentes\ conexas\ no\ isomorfas{:}\ K_{672}\quad y\quad K_{672,672}$

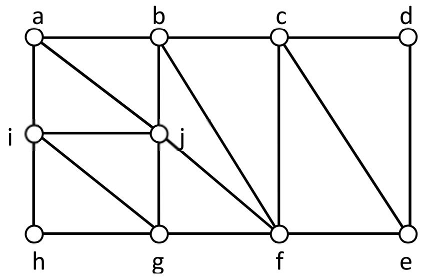
(c) $\chi(K_{672}) = 672\quad y\quad \chi(K_{672,672}) = 2$

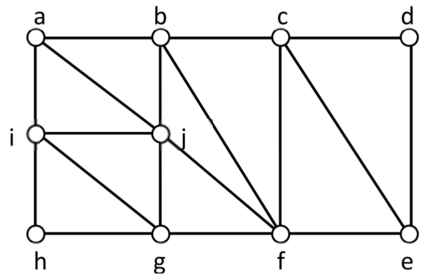
(d) $K_{672}\quad no\ es\ euleriano, si\ es\ hamiltoniano.\ K_{672,672}\quad es\ euleriano\ y\ es\ hamiltoniano$

4. **(1,5 puntos)**

(a) Define conjunto independiente, número cromático e índice cromático en un grafo.

(b) ¿Qué relaciones conoces entre independencia, número cromático y grado máximo? Demuestra una de ellas. Comprueba que se cumplen en el grafo H de la figura.





Solución

(b) I = [a, d, f, h] es un conjunto independiente, número de independencia $\alpha(G) = 4$.

G admite una coloración con 4 colores:

Color 1 = [f, d, i], color 2 = [b, e, g], color 3 = [c, j, h], color 4 = [a], luego $\chi(G) \leq 4$

G contiene a W_6 = [a, b, f, g, i, j] , luego número cromático $\chi(G) \geq \chi(W_6) = 4$

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \qquad 16 = \chi(G).\alpha(G) \geq n = 10$$

5. **(1 punto)**

En un juego de rol hay 6 dados octaédricos de distintos colores. Halla la función generatriz para el número de formas en que se puede obtener suma n cuando se lanzan los 6 dados. Calcula el número de formas en que se puede obtener la suma 29.

Solución

(a) La función generatriz para la selección es

$$f(x) = (x + x^2 + \cdots + x^8)^6 = x^6(1 + x + x^2 + \cdots + x^7)^6 = x^6\frac{(1 - x^8)^6}{(1 - x)^6} = x^6(1 - x^8)^6\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{k}x^k$$

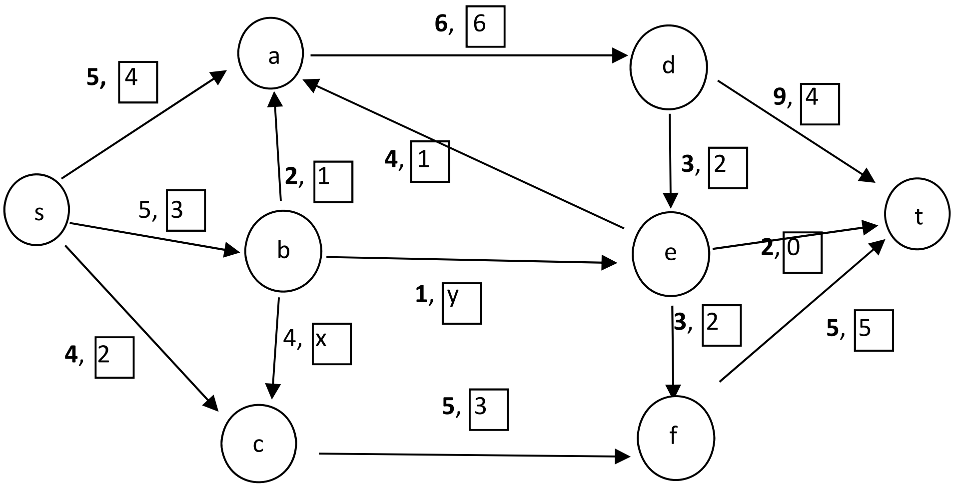
(b) El número de distribuciones posibles es el coeficiente de x^{23} en

$$g(x) = (1 - x^8)^6\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{k}x^k = (1 - 6x^8 + 15x^{16} - 20x^{24} + 15x^{32} - 6x^{40} + x^{48})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{k}x^k$$

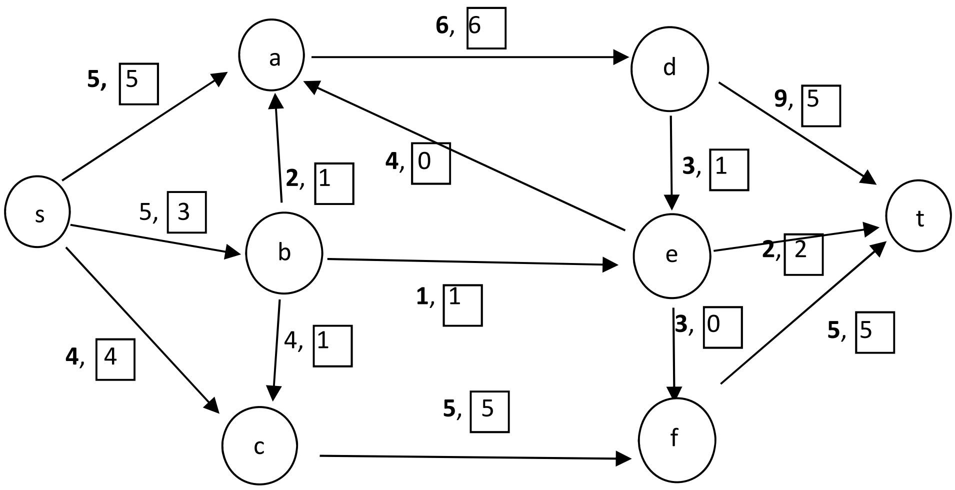
que es el coeficiente de x^{23} en $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{k}x^k$ − 6 coeficiente de x^{15} en $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{k}x^k$ + 15 coeficiente de x^7 en $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+5}{k}x^k$ = $\binom{28}{5} - 6\binom{20}{5} + 15\binom{12}{5}$

6. **(1,5 puntos)**

Enuncia el Teorema de Ford-Fulkerson definiendo, con detalle, los conceptos que aparecen en el enunciado.
En la red de la figura circula un flujo f de valor 9. Las etiquetas de cada arista indican su capacidad (en negrita y en primer lugar) y el valor actual del flujo (en segundo lugar y en recuadro). ¿Cuáles son los valores de x e y?
Indica un camino de f-aumento en la red con arista de retroceso.
Aplica el algoritmo de etiquetado para obtener un flujo de valor máximo. Comprueba el teorema en esta red.



Solución



$f_0 = 9$

Camino de f – aumento con arista de retroceso: { s, a, e, t } de residuo $k = 1 \Rightarrow val(f_1) = 10$

Camino de f – aumento con arista de retroceso: { s, c, f, e, t } de residuo $k = 1 \Rightarrow val(f_2) = 11$

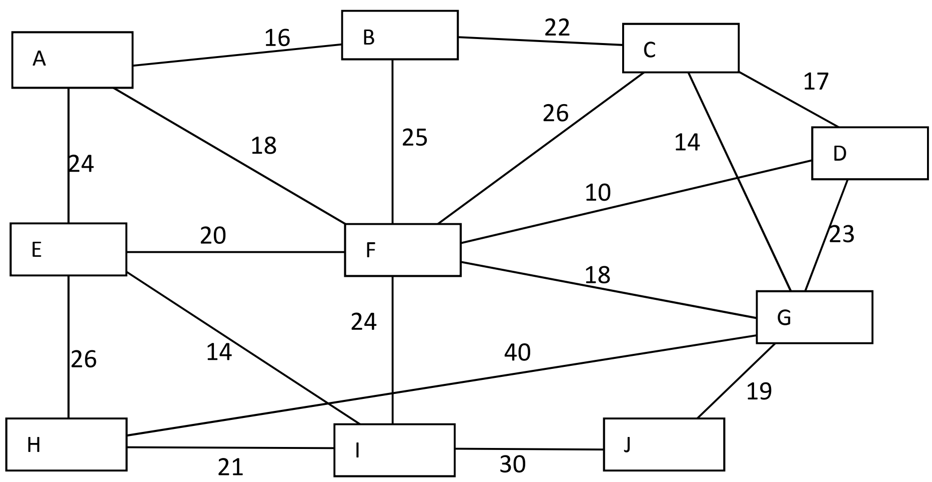
Camino de f – aumento: { s, c, f, e, d, t } de residuo $k = 1 \Rightarrow val(f_3) = 12$

Valor máximo del flujo: $val(f) = 12$.

Corte con capacidad mínima: S = { s, a, b, c }, T = { d, e, f, t }, cap(S, T) = 12.

Las aristas afectadas son {ad, ea, be, cf}.

7. **(1,5 puntos)**
En la red R de acequias de la Comarca Baja se deben realizar tareas de mantenimiento. Para ello se inutilizan temporalmente el mayor número de acequias de forma que el agua siga fluyendo entre todos los depósitos intermedios. La red aparece en el grafo de la figura donde los vértices son los depósitos y la etiqueta de cada arista es el caudal máximo de la correspondiente acequia.
Indica cuál será la red resultante R' si el criterio de inutilización de acequias es que el caudal entre dos depósitos cualesquiera en R' sea el máximo posible.
Explica razonadamente la estrategia que has seguido para obtener R'. Analiza la complejidad del algoritmo correspondiente.



Solución

El árbol generador máximo (algoritmo de Kruskal modificado), cuyas aristas son:

T = [AE, EH, HG, HI, IF, IJ, BF, CF, DG]

contiene a todos los caminos de caudal máximo.